

УДК 512.815.1+512.815.6+512.816.1+512.816.2

MSC 17B10+17B45+20G05+20G20+22C05+22E45+22E47

О. Г. Стырт

Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой

Исследуется вопрос о том, является ли факторпространство компактной линейной группы топологическим многообразием, а также является ли оно гомологическим многообразием. В данной работе разобран случай бесконечной группы с коммутативной связной компонентой.

Ключевые слова: группа Ли, топологический фактор действия.

The problem in question is whether the quotient space of a compact linear group is a topological manifold and whether it is a homological manifold. In the paper, the case of an infinite group with commutative connected component is researched.

Key words: Lie group, topological quotient space of an action.

§ 1. Введение

Пусть имеется точное линейное представление компактной группы Ли G в вещественном векторном пространстве V . Нас будет интересовать вопрос о том, является ли фактор V/G этого действия топологическим многообразием, а также является ли он гомологическим многообразием. Для краткости будем в дальнейшем называть топологическое многообразие просто «многообразие».

Пространство V обладает G -инвариантным скалярным умножением и поэтому может (и будет) рассматриваться как евклидово пространство, на котором группа G действует ортогональными операторами. Кроме того, поскольку представление $G: V$ точное, можно считать, что G — подгруппа Ли группы Ли $\mathbf{O}(V)$, а представление $G: V$ тавтологическое.

Определение. Линейный оператор в пространстве над некоторым полем называется *отражением* (соотв. *псевдоотражением*), если подпространство его неподвижных точек имеет коразмерность 1 (соотв. 2).

К данному моменту разобран случай конечной группы G . Именно, в [1] доказывалось, что если группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ конечна и порождена псевдоотражениями, то $V/G \cong V$. Обратное же утверждение неверно: из того, что $|G| < \infty$ и $V/G \cong V$, не следует, что группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ порождена псевдоотражениями. Более исчерпывающий результат получен относительно недавно в работе [2]. Приведём её основные результаты (теорема 1.1), предварительно определив понятие *группы Пуанкаре*.

Определение. Рассмотрим компактную группу Ли $S := \{v \in \mathbb{H} : \|v\| = 1\} \subset \mathbb{H}$ (с операцией умножения кватернионов), накрывающий гомоморфизм $S \twoheadrightarrow \mathbf{SO}_3$ и прообраз $\Gamma \subset S$ группы вращений додекаэдра при указанном гомоморфизме. *Группой Пуанкаре* называется линейная группа, полученная ограничением действия $S : \mathbb{H}$ левыми сдвигами на подгруппу $\Gamma \subset S$.

Теорема 1.1. *Допустим, что группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ конечна.*

- 1) *Если V/G — гомологическое многообразие, то имеются разложения $G = G_0 \times G_1 \times \dots \times G_k$ и $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), такие что*
 - (i) *подпространства $V_0, V_1, \dots, V_k \subset V$ попарно ортогональны и G -инвариантны;*
 - (ii) *для любых $i, j = 0, \dots, k$ линейная группа $(G_i)|_{V_j} \subset \mathbf{O}(V_j)$ тривиальна при $i \neq j$, порождена псевдоотражениями при $i = j = 0$ и изоморфна группе Пуанкаре при $i = j > 0$ (в частности, $\dim V_j = 4$ для всякого $j = 1, \dots, k$).*
- 2) *Если разложения из п. 1) существуют, а условие $V/G \cong V$ не выполняется, то $k = 1$ и $V_0 = 0$.*

□ См. предложение 3.13 и теорему А в [2]. ■

Следствие 1.1. *Предположим, что группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ конечна. Пусть $G_{\text{ps}} \triangleleft G$ — подгруппа, порождённая всеми псевдоотражениями группы G . Если V/G — гомологическое многообразие, то $G_{\text{ps}} \cdot [G, G] = G$.*

□ Хорошо известно, что группа Пуанкаре совпадает со своим коммутантом. Осталось применить теорему 1.1. ■

Через G^0 будем обозначать связную компоненту единицы группы G , а через \mathfrak{g} — её касательную алгебру.

В данной работе рассматривается случай, когда подгруппа $G^0 \subset G$ коммутативна — что равносильно, является тором. Очевидно, что это свойство сохраняется при переходе к подгруппе и к факторгруппе.

Для произвольного элемента $g \in G$ введём обозначение

$$\omega(g) := \text{rk}(E - g) - \text{rk}(E - \text{Ad}(g)) \in \mathbb{Z}.$$

Положим $\Omega := \{g \in G : \omega(g) \in \{0, 2\}\} \subset G$ и $\Omega' := \{g \in G : \omega(g) = 4, \omega(g^5) = 0\} \subset G$.

На пространстве \mathfrak{g} определено $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное умножение; с помощью последнего мы в дальнейшем будем отождествлять пространства \mathfrak{g} и \mathfrak{g}^* .

Для произвольного конечного множества P векторов в конечномерном пространстве над некоторым полем, рассматриваемого с учётом кратностей своих элементов, количество ненулевых векторов множества P (с учётом кратностей) будем обозначать через $\|P\|$.

Предположим, что подгруппа $G^0 \subset G$ коммутативна, т. е. является тором.

Любое неприводимое представление группы G^0 одномерно либо двумерно. Напомним введённое в [3, § 1] понятие веса её неприводимого представления.

Произвольное двумерное неприводимое представление группы G^0 обладает G^0 -инвариантной комплексной структурой, и мы можем рассматривать его как одномерное комплексное представление группы G^0 , сопоставив ему естественным образом вес — гомоморфизм групп Ли $\lambda: G^0 \rightarrow \mathbb{T}$ — и отождествив последний с его дифференциалом — вектором $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Одномерному представлению группы G^0 сопоставим вес $\lambda := 0 \in \mathfrak{g}^*$.

Классы изоморфных неприводимых представлений группы G^0 характеризуются весами $\lambda \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, определёнными с точностью до знака.

Пусть $P \subset \mathfrak{g}$ — множество весов $\lambda \in \mathfrak{g}$, соответствующее разложению представления $G^0: V$ в прямую сумму неприводимых (с учётом кратностей). Множество $P \subset \mathfrak{g}$ не зависит от выбора указанного разложения (с точностью до знаков весов). Поскольку представление $G: V$ точное, имеем $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$.

Напомним определения q -устойчивых ($q \in \mathbb{N}$) и неразложимых множеств векторов конечномерных пространств над полями [3, § 1], необходимые и в данной работе.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты будем называть его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди указанных линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовём *собственным*. Будем говорить, что множество векторов *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты. Всякое множество векторов разлагается на неразложимые компоненты единственным образом (с точностью до распределения нулевого вектора), причём для любого его разложения на компоненты каждая компонента является объединением некоторых его неразложимых компонент (вновь с точностью до нулевого вектора).

Определение. Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учётом кратностей своих элементов, назовём q -устойчивым ($q \in \mathbb{N}$), если его линейная оболочка сохраняется при удалении из него любых векторов в количестве не более q (с учётом кратностей).

Теорема 1.2. Если V/G — многообразие, то множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 1-устойчивым.

□ См. предложение 2.2 в [3, § 2]. ■

В [3, § 8] описывается метод сопоставления каждой компактной линейной группе с коммутативной связной компонентой, 1- устойчивым множеством весов и фактором M компактной линейной группы с коммутативной связной компонентой, 2- устойчивым множеством весов и фактором, гомеоморфным M . Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать случай 2- устойчивого множества $P \subset \mathfrak{g}$.

В п. 3.4 будет доказана следующая теорема.

Теорема 1.3. *Допустим, что V/G — гомологическое многообразие, а множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 2- устойчивым. Тогда существуют разложения $G = G_0 \times G_1 \times \dots \times G_p$ и $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_p$ ($p \in \mathbb{N}$), такие что*

- 1) *подпространства $V_0, V_1, \dots, V_p \subset V$ попарно ортогональны и G - инвариантны;*
- 2) *для произвольных $i, j = 0, \dots, p$ линейная группа $(G_i)|_{V_j} \subset \mathbf{O}(V_j)$ тривиальна при $i \neq j$, конечна при $i = j = 0$ и бесконечна при $i = j > 0$;*
- 3) *для всякого $l = 0, \dots, p$ фактор V_l/G_l является гомологическим многообразием;*
- 4) *для произвольного $l = 1, \dots, p$ множество весов представления $G_l: V_l$ неразложимо, 2- устойчиво и не содержит нулей.*

Если разложения из формулировки теоремы 1.3 существуют, то V/G — гомологическое многообразие; если при этом каждый из факторов V_l/G_l , $l = 0, \dots, p$, является многообразием, то V/G — многообразие.

Топологические свойства факторпространства конечной линейной группы описываются теоремой 1.1, и, таким образом, требуется исследовать случай представления с неразложимым 2- устойчивым множеством весов, не содержащим нулей, чему будут посвящены теоремы 1.4 и 1.5.

Далее до конца введения будем предполагать, что множество $P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо, 2- устойчиво и не содержит нулей. Положим $m := \dim G \in \mathbb{N}$. Ввиду соотношения $0 \notin P$, пространство V обладает G^0 - инвариантной комплексной структурой.

Теорема 1.4. *Допустим, что $m > 1$. Следующие условия 1)–3) эквивалентны:*

- 1) V/G — многообразие;
- 2) V/G — гомологическое многообразие;
- 3) *выполняются нижеприведённые условия (i)–(iv):*
 - (i) $\|P\| = m + 2$;
 - (ii) *пространство V разлагается в прямую сумму попарно ортогональных двумерных неприводимых G^0 - инвариантных подпространств $W_1, \dots, W_{m+2} \subset V$, неразлагаемых группой G , причём $G(W_1 \oplus \dots \oplus W_m) = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ и, кроме того, $(m > 2) \Rightarrow (GW_j = W_j \forall j = 1, \dots, m + 2)$;*
 - (iii) *найдётся элемент $g \in G$, такой что $\text{Ad}(g) = -E$ и $gW_j = W_j \forall j = 1, \dots, m + 2$;*
 - (iv) *если $v \in V$ и $|G_v| < \infty$, то $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$.*

При $m = 1$ будем дополнительно предполагать, что группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ не содержит комплексных отражений, — к этому можно свести произвольный случай (см. [3, §§ 3, 7]).

Теорема 1.5. *Допустим, что $m = 1$, а группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ не содержит комплексных отражений. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) V/G — многообразие;
- 2) V/G — гомологическое многообразие;
- 3) $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = 3$, $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$, $G = \langle \Omega \rangle$, а представление $G: V$ приводимо.

В каждой из теорем 1.4 и 1.5 импликация $3) \Rightarrow 1)$ доказана (см. [3, § 1], теоремы 1.3 и 1.5 соответственно), а импликация $1) \Rightarrow 2)$ очевидна. Осталось доказать импликации $2) \Rightarrow 3)$ в теоремах 1.4 и 1.5, что будет сделано в п. 3.5.

§ 2. Обозначения и вспомогательные факты

В этом параграфе приведён ряд вспомогательных обозначений и утверждений, в том числе заимствованных из [2, 3] (все новые утверждения — с доказательствами).

Лемма 2.1. *Пусть X и Y — топологические пространства, а n — натуральное число.*

- 1) *Если X — односвязная гомологическая n -сфера, то $X \cong S^n$.*
- 2) *Конус над пространством X является гомологическим $(n+1)$ -многообразием тогда и только тогда, когда X — гомологическая n -сфера.*
- 3) *Пространство $X \times Y$ является гомологическим многообразием тогда и только тогда, когда X и Y — гомологические многообразия.*

□ См. теорему 2.3 и лемму 2.6 в [2, § 2]. ■

2.1. Элементарные сведения линейной алгебры

Утверждение 2.1. *Пусть g — антилинейный оператор в n -мерном комплексном пространстве V . Тогда $\dim_{\mathbb{R}} V^g \leq n$ — что равносильно, $\text{rk}_{\mathbb{R}}(E - g) \geq n$.*

□ Вытекает из очевидных соотношений $V^{-g} = iV^g \subset V$ и $V^g \cap V^{-g} = 0$. ■

Напомним основные свойства q -устойчивых ($q \in \mathbb{N}$) конечных множеств векторов конечномерных пространств над полями, которые (множества) рассматриваются с учётом кратностей своих элементов [3, § 1].

- 1) Добавление и удаление нулевых векторов, а также умножение векторов на ненулевые элементы поля не влияют на q -устойчивость множества.
- 2) Образ q -устойчивого множества при линейном отображении пространств является q -устойчивым множеством. В частности, если некоторое множество линейных

функций на пространстве q -устойчиво, то множество ограничений всех линейных функций данного множества на произвольное подпространство также q -устойчиво.

- 3) Для любого разложения произвольного q -устойчивого множества на компоненты (необязательно неразложимые) каждая из компонент является q -устойчивой.
- 4) Всякое q -устойчивое множество с m -мерной линейной оболочкой ($m \in \mathbb{N}$) содержит не менее $m + q$ ненулевых векторов.
- 5) Всякое q -устойчивое множество с m -мерной линейной оболочкой ($m \in \mathbb{N}$), содержащее ровно $m + q$ ненулевых векторов, неразложимо, а любые его ненулевые векторы в количестве не более m линейно независимы.

Для конечномерного представления конечной группы над произвольным полем следующие условия эквивалентны:

- 1) подпространство инвариантов тривиально;
- 2) сумма векторов в любой орбите равна нулю.

Представление, удовлетворяющее условиям 1) и 2), будем для краткости называть *представлением без инвариантов* или *представлением, не имеющим инвариантов*.

Очевидно, что любое подпредставление представления без инвариантов также не имеет инвариантов.

Утверждение 2.2. *Никакая группа нечётного порядка не обладает одномерным вещественным представлением без инвариантов.*

□ Любое одномерное вещественное представление группы нечётного порядка является тождественным, что немедленно влечёт требуемое. ■

Следствие 2.1. *Всякое неприводимое вещественное представление коммутативной группы нечётного порядка, не имеющее инвариантов, двумерно.*

Следствие 2.2. *Если некоторая коммутативная группа имеет нечётный порядок, то размерность любого её вещественного представления без инвариантов чётна.*

Лемма 2.2. *Рассмотрим произвольное представление конечной группы Γ в пространстве W над полем \mathbb{F} , не имеющее инвариантов. Далее, пусть $W_1, \dots, W_p \subset W$ ($p \in \mathbb{N}$) — линейно независимые подпространства, переставляемые группой Γ , а Γ' — подгруппа $\{\gamma \in \Gamma : \gamma W_1 = W_1\} \subset \Gamma$.*

- 1) *Представление $\Gamma' : W_1$ не имеет инвариантов.*
- 2) *Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, а Γ — группа нечётного порядка, то $\dim W_1 \neq 1$.*

□ Для всякого вектора $w \in W_1$ имеем $\Gamma'w \subset W_1$ и $(\Gamma w) \setminus (\Gamma'w) \subset W_2 \oplus \dots \oplus W_p$, причём сумма векторов в орбите $\Gamma w \subset W$ равна нулю, вследствие чего сумма векторов подмножества $\Gamma'w \subset W_1$ равна нулю. Значит, $\Gamma' : W_1$ — представление без инвариантов. Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, а Γ — группа нечётного порядка, то $\Gamma' \subset \Gamma$ — группа нечётного порядка, и, в силу утверждения 2.2, $\dim W_1 \neq 1$. ■

Следствие 2.3. *Рассмотрим произвольное вещественное представление группы Γ нечётного порядка в пространстве W , не имеющее инвариантов. Всякая орбита действия группы Γ на множестве прямых пространства W состоит из нечётного числа линейно зависимых прямых.*

2.2. Представления компактных групп

Допустим, что имеется евклидово пространство V , компактная группа Ли G с касательной алгеброй \mathfrak{g} , линейное представление $G \rightarrow \mathbf{O}(V)$ и его дифференциал — представление $\mathfrak{g}: V$. Изображение факторизации $V \rightarrow V/G$ будем обозначать через π , стабилизатор (соотв. стационарную подалгебру) вектора $v \in V$ — через G_v (соотв. через \mathfrak{g}_v), а подпространство $(\mathfrak{g}v)^\perp \subset V$ ($v \in V$) — через N_v .

Пусть $v \in V$ — произвольный вектор. Имеем $\mathfrak{g}_v = \text{Lie } G_v$, $G_v(\mathfrak{g}v) = \mathfrak{g}v$ и $G_v N_v = N_v$. Положим $M_v := N_v \cap (N_v^{G_v})^\perp \subset N_v$. Ясно, что $N_v = N_v^{G_v} \oplus M_v \subset V$ и $G_v M_v = M_v$.

Предложение 2.1. *Если V/G — многообразие, то найдётся связная G -инвариантная окрестность нуля $U \subset V$, для которой фактор U/G гомеоморфен открытому шару B размерности $\dim(V/G)$.*

□ Точка $\pi(0) \in V/G$ обладает окрестностью, гомеоморфной B . Это означает, что существует G -инвариантная окрестность нуля $U \subset V$, для которой $U/G \cong B$. Пусть $U^0 \subset U$ — компонента линейной связности окрестности U , содержащая точку 0 . Тогда подмножества U^0 и $U \setminus U^0$ окрестности U открыты и G -инвариантны. Подмножества $\pi(U^0) \subset \pi(U)$ и $\pi(U \setminus U^0) \subset \pi(U)$ являются открытыми, имеют пустое пересечение и дают в объединении связный фактор $\pi(U) = U/G \cong B$. Следовательно, $U = U^0$ и, таким образом, окрестность $U \subset V$ связна. ■

Лемма 2.3. *Если в факторе V/G некоторая окрестность точки $\pi(0)$ является (гомологическим) многообразием, то V/G — (гомологическое) многообразие.*

□ В пространстве V найдутся G -инвариантная окрестность нуля U , такая что U/G — (гомологическое) многообразие, и открытый шар $B \subset U$ с центром в нуле. Имеем $GB = B$, причём B/G — (гомологическое) многообразие. Наконец, существует G -эквивариантный гомеоморфизм $V \rightarrow B$, что влечёт требуемое. ■

Теорема 2.1. *Пусть $v \in V$ — некоторый вектор. Фактор V/G является (гомологическим) многообразием локально в точке $\pi(v)$ тогда и только тогда, когда N_v/G_v — (гомологическое) многообразие.*

□ В силу теоремы о слайсе [4, гл. II, § 4 — 5], фактор V/G локально в точке $\pi(v)$ гомеоморфен фактору N_v/G_v локально в нуле. Осталось применить лемму 2.3. ■

Следствие 2.4. *Пусть $v \in V$ — некоторый вектор. Если V/G — гомологическое многообразие, то M_v/G_v — гомологическое многообразие.*

□ Имеем $N_v/G_v \cong N_v^{G_v} \times (M_v/G_v)$. Далее, в силу теоремы 2.1, N_v/G_v — гомологическое многообразие. Осталось применить лемму 2.1. ■

Утверждение 2.3. В любом G^0 -инвариантном подпространстве $V' \subset V$ существует вектор v , для которого $M_v \subset (V')^\perp$.

□ См. утверждение 2.2 в [3, § 2]. ■

Пусть $v \in V$ — некоторый вектор, такой что $|G_v| < \infty$. Тогда $\mathfrak{g}_v = 0$, и для любого элемента $g \in G_v$ имеем

$$\dim((E - g)N_v) = \dim((E - g)V) - \dim((E - g)(\mathfrak{g}v)) = \text{rk}(E - g) - \text{rk}(E - \text{Ad}(g)) = \omega(g).$$

В частности, элемент $g \in G_v$ принадлежит подмножеству $\Omega \subset G$, если и только если он действует на подпространстве $N_v \subset V$ псевдоотражением либо тождественно.

Лемма 2.4. Если V/G — гомотопическое многообразие, то для всякого вектора $v \in V$, такого что $|G_v| < \infty$, имеем $\langle G_v \cap \Omega \rangle \cdot [G_v, G_v] = G_v$.

□ Вытекает из теоремы 2.1 и следствия 1.1. ■

§ 3. Доказательства результатов

На протяжении дальнейшей части работы будем предполагать, что $G^0 \cong \mathbb{T}^m$, $m \in \mathbb{N}$, и что представление $G: V$ точное. Стабилизатор общего положения указанного представления конечен, вследствие чего $\dim(V/G) = \dim V - \dim G = \dim V - m$. Множество $P \subset \mathfrak{g}$ весов представления $G: V$ удовлетворяет равенству $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$. Легко видеть, что $\text{Ad}(G^0) = \{E\}$ и $|\text{Ad}(G)| < \infty$.

Изотипную компоненту представления $G^0: V$, соответствующую неприводимым представлениям с произвольным весом $\lambda \in P$, обозначим через V_λ . Для всякого $\lambda \in P \setminus \{0\}$ изотипная компонента $V_\lambda \subset V$ обладает структурой комплексного пространства, на котором группа G^0 действует скалярными линейными операторами. Пространство V разлагается в прямую сумму своих попарно ортогональных подпространств V_λ ($\lambda \in P$), переставляемых группой G .

Имеем $\text{Ad}(G)P = P$ и $gV_\lambda = V_{\text{Ad}(g)\lambda}$ ($\lambda \in P$, $g \in G$). В частности, $GV_0 = V_0$. Кроме того, $V_0 = V^{G^0}$. Подпространство $V_0^\perp \subset V$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных изотипных компонент $V_\lambda \subset V$ ($\lambda \in P \setminus \{0\}$), переставляемых группой G , и обладает G^0 -инвариантной структурой комплексного пространства размерности $\|P\|$.

Пусть $\lambda \in P \setminus \{0\}$ — произвольный вес. Элемент $g \in G$ переводит в себя изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$, если и только если $\text{Ad}(g)\lambda = \pm\lambda$, действуя на ней при $\text{Ad}(g)\lambda = \lambda$ (соотв. при $\text{Ad}(g)\lambda = -\lambda$) линейно (соотв. антилинейно) над полем \mathbb{C} .

Пусть $S \subset V$ — единичная сфера евклидова пространства V , $D \subset G$ — подмножество $\{g \in G: V^g \neq 0\} = \{g \in G: S^g \neq \emptyset\} = \bigcup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} G_v = \bigcup_{v \in S} G_v$, а G_{st} — нормальная

подгруппа Ли $\langle G^0 \cup D \rangle \subset G$. Группа Ли G/G_{st} конечна, а действие $(G/G_{\text{st}}): (S/G_{\text{st}})$ свободное.

Предложение 3.1. Если $g \in G$ и $\mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)} \neq 0$, то $g \in G_{\text{st}}$.

□ Рассмотрим подгруппу Ли $H := \mathcal{Z}_G(g) \subset G$.

По условию $\mathfrak{h} := \text{Lie } H = \mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)} \neq 0$, откуда $\dim H > 0$. Поскольку представление $H^0: V$ точное, некоторая его изотипная компонента $V' \subset V$ обладает комплексной структурой, такой что $(H^0)|_{V'} = \mathbb{T}E \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V')$. Далее, $g \in \mathcal{Z}(H) \subset H$, $\text{Ad}_H(g) = \text{id}_{\mathfrak{h}}$, вследствие чего $gV' = V'$ и $g|_{V'} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V')$. Найдётся вектор $v \in V' \setminus \{0\}$, являющийся собственным для оператора $g|_{V'} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V')$. Имеем $gv \in \mathbb{T}v = H^0v$, $g \in H^0G_v \subset G_{\text{st}}$. ■

Следствие 3.1. Справедливо включение $\text{Ker Ad} \subset G_{\text{st}}$.

Предложение 3.2. Если $m = 1$ и $V_0 = 0$, то (априори абстрактная) подгруппа $H := \langle (\text{Ker Ad}) \cap D \rangle \triangleleft G$ конечна.

□ Обозначим через n число $\|P\| \in \mathbb{N}$, а через φ — изоморфизм групп Ли $G^0 \rightarrow \mathbb{T}$.

Пространство V обладает структурой комплексного пространства с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$, удовлетворяющей для некоторых натуральных чисел k_1, \dots, k_n условиям $G^0 \subset \text{Ker Ad} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ и $ge_j = (\varphi(g))^{k_j} \cdot e_j \in V$, где $g \in G^0$ и $j = 1, \dots, n$. Легко видеть, что $(\text{Ker Ad}) \cap D \subset H \subset \text{Ker Ad} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

Положим $k_0 := |G/G^0| \in \mathbb{N}$, $k := k_1 \dots k_n \in \mathbb{N}$ и $k' := k_1 + \dots + k_n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим произвольный элемент $h \in (\text{Ker Ad}) \cap D$. Ясно, что $g := h^{k_0} \in G^0 \cap D$.

Найдётся число $j \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющее равенству $(\varphi(g))^{k_j} = 1$. Заметим, что $g^{k_j} = E$, $g^k = E$, $h^{k_0k} = E$, $(\det_{\mathbb{C}} h)^{k_0k} = \det_{\mathbb{C}}(h^{k_0k}) = 1$.

Таким образом, равенство $(\det_{\mathbb{C}} h)^{k_0k} = 1$ выполняется для любого $h \in (\text{Ker Ad}) \cap D$, а значит, и для любого $h \in H$. В частности, если $h \in G^0 \cap H$ — произвольный элемент, то $1 = (\det_{\mathbb{C}} h)^{k_0k} = (\varphi(h))^{k'k_0k}$. Отсюда $|G^0 \cap H| = |\varphi(G^0 \cap H)| \leq k'k_0k < \infty$, $|H| < \infty$. ■

Далее будем считать, что V/G — гомотопическое многообразие, а множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 2-устойчивым.

3.1. Начальные свойства

Имеем $\|P\| \geq m + 2$, $\dim V \geq 2m + 4 > 4$, $\dim S > 3$. Поэтому сфера $S \subset V$ связна и односвязна. Согласно лемме 2.1, $M := S/G$ — гомотопическая сфера. Кроме того, $\dim(V/G) = \dim V - m \geq (2m + 4) - m > 4$, $\dim M > 3$. Отсюда (вновь см. лемму 2.1)

$$(\pi_1(M)) / [\pi_1(M), \pi_1(M)] \cong H_1(M) = 0; \quad (3.1)$$

$$(\pi_1(M) = \{e\}) \Rightarrow (\pi_2(M) = 0). \quad (3.2)$$

Лемма 3.1. Группа G/G_{st} совпадает со своим коммутантом.

□ Поскольку сфера $S \subset V$ связна, факторпространство S/G_{st} связно. Далее, как уже отмечалось, $|G/G_{\text{st}}| < \infty$, а действие $(G/G_{\text{st}}): (S/G_{\text{st}})$ свободное. Фактор данного

действия гомеоморфен M , а отображение факторизации $(S/G_{\text{st}}) \rightarrow M$ является накрытием со слоем G/G_{st} . Значит, существует сюръективный гомоморфизм $\pi_1(M) \rightarrow G/G_{\text{st}}$. Ввиду (3.1), $\pi_1(M) = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$, что влечёт требуемое. ■

Теорема 3.1. *Если $m = 1$ и $V_0 = 0$, то $\text{Ad}(D) \ni -E$.*

□ Допустим, что утверждение теоремы не выполняется, т.е. что $D \subset \text{Ker Ad}$.

В силу предложения 3.2, $H := \langle D \rangle \triangleleft G$ — конечная подгруппа Ли, а $G' := G/H$ — одномерная группа Ли. Согласно следствию 3.1, $\text{Ker Ad} \subset G_{\text{st}} = \langle G^0 \cup D \rangle \subset \text{Ker Ad}$, $\text{Ker Ad} = \langle G^0 \cup D \rangle = G^0 H$, $G'/(G')^0 \cong G/(G^0 H) = G/(\text{Ker Ad}) \cong \text{Ad}(G)$.

Напомним, что сфера $S \subset V$ связна и односвязна. Из этого, а также из соотношений $D = \{g \in G: S^g \neq \emptyset\} \subset G$, $H = \langle D \rangle \triangleleft G$ и $|H| < \infty$ вытекает, что факторпространство S/H связно и односвязно, а действие $G': (S/H)$ свободное. Фактор данного действия гомеоморфен M , отображение факторизации $(S/H) \rightarrow M$ является локально тривиальным расслоением со слоем G' , и мы можем рассмотреть участок точной гомотопической последовательности $\pi_2(M) \rightarrow \pi_1(G') \rightarrow \pi_1(S/H) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow G'/(G')^0 \rightarrow 0$. Поскольку $\pi_1(S/H) = \{e\}$ и $\pi_1(G') \cong \mathbb{Z}$, имеем $\pi_2(M) \neq 0$ и $\pi_1(M) \cong G'/(G')^0 \cong \text{Ad}(G)$. Наконец, ввиду (3.1), $\pi_1(M) = [\pi_1(M), \pi_1(M)] \cong [\text{Ad}(G), \text{Ad}(G)] = \{E\}$, $\pi_1(M) = \{e\}$. Получили противоречие с (3.2). ■

Теорема 3.2. *Если $m = 1$ и $V_0 = 0$, то $\text{Ad}(\Omega) \ni -E$.*

□ Допустим, что утверждение теоремы не выполняется, т.е. что $\Omega \subset \text{Ker Ad}$.

Имеем $\langle \Omega \rangle \subset \text{Ker Ad}$ и, кроме того, $[G, G] \subset \text{Ker Ad}$, откуда $\langle \Omega \rangle \cdot [G, G] \subset \text{Ker Ad}$.

Рассмотрим произвольный вектор $v \in S$. Как легко заметить, $|G_v| < \infty$. Согласно лемме 2.4, $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle \cdot [G_v, G_v] \subset \langle \Omega \rangle \cdot [G, G] \subset \text{Ker Ad}$.

Мы видим, что для всякого $v \in S$ выполнено включение $G_v \subset \text{Ker Ad}$. Следовательно, $D = \bigcup_{v \in S} G_v \subset \text{Ker Ad}$, что невозможно в силу теоремы 3.1. ■

Теорема 3.3. *Если $m = 1$ и $V_0 = 0$, то $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$ и $\|P\| = 3$.*

□ Согласно теореме 3.2, найдётся элемент $g \in \Omega$, такой что $\text{Ad}(g) = -E$. Имеем $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$, $n := \|P\| \geq 3$, $\text{rk}(E - \text{Ad}(g)) = 1$ и $\omega(g) \leq 2$, откуда $\text{rk}(E - g) \leq 3$. Пространство V обладает структурой n - мерного комплексного пространства, на котором элемент $g \in G$ действует антилинейно. Значит, $\text{rk}(E - g) \geq n \geq 3 \geq \text{rk}(E - g)$, $n = 3$. ■

Для конечного подмножества $Q \subset \mathfrak{g}^*$, рассматриваемого с учётом кратностей своих элементов, подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и вектора $\xi \in \mathfrak{g}$ положим $Q|_{\mathfrak{h}} := \{\lambda|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*: \lambda \in Q\} \subset \mathfrak{h}^*$ и $Q_{\xi} := \{\lambda \in Q: \lambda(\xi) \neq 0\} \subset Q$.

Пусть $v \in V$ — произвольный вектор. Имеем $\mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) = \mathfrak{g}(\mathfrak{g}_v v) = 0$, $\mathfrak{g}v \subset V^{G_v^0} \subset V$ и, как следствие, $M_v^{\perp} = (\mathfrak{g}v) \oplus N_v^{G_v} \subset V^{G_v^0} \subset V$. Представление $G_v: V$ точное, а множество его весов совпадает с множеством $P|_{\mathfrak{g}_v} \subset \mathfrak{g}_v^*$. Значит, представление $G_v^0: M_v$ точное, а множество его весов с точностью до нулей совпадает с множеством $P|_{\mathfrak{g}_v} \subset \mathfrak{g}_v^*$.

Теорема 3.4. *Если $m = 1$, то $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$ и $\|P\| = 3$.*

□ Согласно утверждению 2.3, существует вектор $v \in V_0$, для которого $M_v \subset V_0^\perp$. Далее, в силу следствия 2.4, M_v/G_v — гомологическое многообразие. Имеем $G_v \supset G^0$, $G_v^0 = G^0$, $\mathfrak{g}_v = \text{Lie } G_v = \mathfrak{g}$, $\dim G_v = 1$. Представление $G_v^0: M_v$ точное, а множество его весов с точностью до нулей совпадает с множеством $P \subset \mathfrak{g}$. При этом $M_v \subset V_0^\perp$, откуда $M_v^{G_v^0} = M_v^{G^0} = 0$. Осталось применить теорему 3.3 к представлению $G_v: M_v$. ■

Лемма 3.2. Пусть $Q \subset P$ — подмножество, для которого $\bigcap_{\lambda \in Q} (\text{Ker } \lambda) = \mathbb{R}\xi \subset \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$. Тогда $\text{Ad}(G)\xi \ni -\xi$ и $\|P_\xi\| = 3$.

□ В каждой изотипной компоненте $V_\lambda \subset V$ ($\lambda \in Q$) выберем ненулевой вектор v_λ . Положим $v := \sum_{\lambda \in Q} v_\lambda \in V$. Имеем $\text{Lie } G_v = \mathfrak{g}_v = \bigcap_{\lambda \in Q} (\text{Ker } \lambda) = \mathbb{R}\xi \subset \mathfrak{g}$, $\dim G_v = 1$.

Представление $G_v^0: M_v$ точное, а множество его весов с точностью до нулей совпадает с 2-устойчивым множеством $P|_{\mathfrak{g}_v} \subset \mathfrak{g}_v^*$. Согласно следствию 2.4, M_v/G_v — гомологическое многообразие. Далее, в силу теоремы 3.4, $(\text{Ad}(G_v))|_{\mathfrak{g}_v} = \{\pm \text{id}_{\mathfrak{g}_v}\} \subset \mathbf{O}(\mathfrak{g}_v)$, $\text{Ad}(G_v)\xi = \{\pm\xi\} \subset \mathfrak{g}_v$, $\text{Ad}(G)\xi \ni -\xi$, а также $\|P|_{\mathfrak{g}_v}\| = 3$, $\|P_\xi\| = \|P|_{(\mathbb{R}\xi)}\| = 3$. ■

Лемма 3.3. Всякая неразложимая компонента Q множества $P \subset \mathfrak{g}$ удовлетворяет равенству $\|Q\| = \dim \langle Q \rangle + 2$.

□ Поскольку $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$, множество $P \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ представляется в виде объединения (с учётом кратностей векторов) своих подмножеств P' и P'' , таких что подмножество $P' \subset \mathfrak{g}^*$ не содержит кратных векторов и совпадает с некоторым базисом $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ пространства \mathfrak{g}^* . Существует базис $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ пространства \mathfrak{g} , удовлетворяющий равенствам $\lambda_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, m$).

Имеем $\|P'_{\xi_j}\| = 1$ ($j = 1, \dots, m$) и $\|P'_{\xi_{j_1}} \triangle P'_{\xi_{j_2}}\| = 2$ ($j_1, j_2 = 1, \dots, m, j_1 \neq j_2$). Далее, для всякого $j = 1, \dots, m$ пересечение ядер всех весов $\lambda_i \in P$ ($i = 1, \dots, m, i \neq j$) есть не что иное как подпространство $\mathbb{R}\xi_j \subset \mathfrak{g}$, $\xi_j \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$, и, согласно лемме 3.2, $\|P_{\xi_j}\| = 3$, $\|P''_{\xi_j}\| = \|P_{\xi_j}\| - \|P'_{\xi_j}\| = 2$.

Как легко заметить, $P'' \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^m P''_{\xi_j} \subset P''$.

Покажем, что среди подмножеств $P''_{\xi_j} \subset P''$ ($j = 1, \dots, m$) никакие два различных не пересекаются.

Допустим, что $P''_{\xi_{j_1}} \neq P''_{\xi_{j_2}}$ и $P''_{\xi_{j_1}} \cap P''_{\xi_{j_2}} \neq \emptyset$ для некоторых $j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}$.

Ясно, что $j_1 \neq j_2$. Значит, $\|P'_{\xi_{j_1}} \triangle P'_{\xi_{j_2}}\| = 2$. Кроме того, найдётся вес $\lambda \in P$, такой что $c_1 := \lambda(\xi_{j_1}) \neq 0$ и $c_2 := \lambda(\xi_{j_2}) \neq 0$. Пересечение ядер всех весов $\lambda_i \in P$ ($i = 1, \dots, m, i \neq j_1, j_2$) и $\lambda \in P$ совпадает с подпространством $\mathbb{R}\xi \subset \mathfrak{g}$, $\xi := c_2\xi_{j_1} - c_1\xi_{j_2} \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$, и, в силу леммы 3.2, $\|P_\xi\| = 3$. Из соотношения $c_1, c_2 \neq 0$ вытекает, что $P_{\xi_{j_1}} \triangle P_{\xi_{j_2}} \subset P_\xi$, $\|P_{\xi_{j_1}} \triangle P_{\xi_{j_2}}\| \leq \|P_\xi\| = 3$, $\|P''_{\xi_{j_1}} \triangle P''_{\xi_{j_2}}\| = \|P_{\xi_{j_1}} \triangle P_{\xi_{j_2}}\| - \|P'_{\xi_{j_1}} \triangle P'_{\xi_{j_2}}\| \leq 1$. В то же время $\|P''_{\xi_{j_1}}\| = \|P''_{\xi_{j_2}}\| = 2$ и $P''_{\xi_{j_1}} \neq P''_{\xi_{j_2}}$, откуда $\|P''_{\xi_{j_1}} \triangle P''_{\xi_{j_2}}\| \geq 2$. Получили противоречие.

Тем самым мы установили, что среди подмножеств $P''_{\xi_j} \subset P''$ ($j = 1, \dots, m$) никакие два различных не пересекаются.

Следовательно, существуют разложения $\{1, \dots, m\} = \bigsqcup_{l=1}^p I_l$ и $P'' \setminus \{0\} = \bigsqcup_{l=1}^p Q_l'' \subset P''$ ($p \in \mathbb{N}$), где $I_l \subset \{1, \dots, m\}$, $I_l \neq \emptyset$, $Q_l'' \subset P'' \setminus \{0\}$, $\|Q_l''\| = 2$ ($l = 1, \dots, p$) и, кроме того, $P_{\xi_j}'' = Q_l'' \subset P''$ ($l = 1, \dots, p$, $j \in I_l$).

Рассмотрим произвольное число $l \in \{1, \dots, p\}$.

Пусть $Q_l' \subset P'$ — подмножество, включающее в себя каждый из векторов $\lambda_i \in \mathfrak{g}^*$, $i \in I_l$, с кратностью 1 и не содержащее других векторов пространства \mathfrak{g}^* , а $Q_l \subset P$ — объединение (с учётом кратностей векторов) подмножеств $Q_l' \subset P'$ и $Q_l'' \subset P''$. Если $\lambda \in Q_l'' \subset P''$ и $j \in \{1, \dots, m\} \setminus I_l$, то $\lambda \notin P_{\xi_j}''$, $\lambda(\xi_j) = 0$. Значит, $Q_l'' \subset \langle \lambda_i \rangle_{i \in I_l} = \langle Q_l' \rangle \subset \mathfrak{g}^*$, $\langle Q_l \rangle = \langle Q_l' \rangle \subset \mathfrak{g}^*$, $\dim \langle Q_l \rangle = \dim \langle Q_l' \rangle = |Q_l'| = \|Q_l'\|$, $\|Q_l\| = \|Q_l'\| + \|Q_l''\| = \dim \langle Q_l \rangle + 2$.

Имеем $\mathfrak{g}^* = \bigoplus_{l=1}^p \langle Q_l' \rangle = \bigoplus_{l=1}^p \langle Q_l \rangle$ и $P' = \bigsqcup_{l=1}^p Q_l' \subset P \setminus \{0\}$, откуда $P \setminus \{0\} = \bigsqcup_{l=1}^p Q_l \subset P$.

Таким образом, множество $P \setminus \{0\} \subset P$ разлагается на компоненты $Q_l \subset P$ ($l = 1, \dots, p$). Для всякого $l = 1, \dots, p$ компонента $Q_l \subset P$ является 2-устойчивой и, в силу равенства $\|Q_l\| = \dim \langle Q_l \rangle + 2$, неразложимой. Это завершает доказательство. ■

3.2. Порождающие стабилизаторы

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.5. *Имеем $G_{\text{st}} = G$.*

Доказательству теоремы 3.5 предпошлём несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.4. *Пусть $\Gamma \subset \text{Ad}(G)$ — коммутативная подгруппа нечётного порядка. Тогда $\mathfrak{g}^\Gamma \neq 0$.*

□ Предположим, что $\mathfrak{g}^\Gamma = 0$, т. е. что тавтологическое представление $\Gamma: \mathfrak{g}$ не имеет инвариантов.

Пусть $Q \subset \mathfrak{g}$ — некоторая неразложимая компонента множества $P \subset \mathfrak{g}$, Γ' — подгруппа $\{\gamma \in \Gamma: \gamma Q = Q\} = \{\gamma \in \Gamma: \gamma \langle Q \rangle = \langle Q \rangle\} \subset \Gamma$, а \bar{Q} — множество всевозможных прямых $\mathbb{R}\lambda \subset \mathfrak{g}$, $\lambda \in Q \setminus \{0\}$ (без учёта кратностей прямых). Ясно, что $\Gamma' \bar{Q} = \bar{Q}$.

Линейные оболочки всех неразложимых компонент множества $P \subset \mathfrak{g}$ суть линейно независимые подпространства пространства \mathfrak{g} , переставляемые группой Γ , и, согласно лемме 2.2, представление $\Gamma': \langle Q \rangle$ не имеет инвариантов. При этом $\Gamma' \subset \Gamma$ — коммутативная группа нечётного порядка. В силу следствий 2.2 и 2.3, число $m' := \dim \langle Q \rangle \in \mathbb{N}$ чётно, а любая орбита действия $\Gamma': \bar{Q}$ состоит из нечётного числа линейно зависимых прямых. В частности, $m' \geq 2$.

Неразложимая компонента $Q \subset \mathfrak{g}$ множества $P \subset \mathfrak{g}$ является 2-устойчивой и, согласно лемме 3.3, удовлетворяет равенству $\|Q\| = \dim \langle Q \rangle + 2$. Значит, в множестве $Q \subset \mathfrak{g}$ любые ненулевые векторы в количестве не более m' линейно независимы. Поскольку $m' \geq 2$, все ненулевые векторы данного множества попарно не пропорциональ-

ны. Следовательно, множество \overline{Q} включает в себя ровно $m' + 2$ прямых, среди которых любые в количестве не более m' линейно независимы.

Ввиду вышесказанного, всякая орбита действия $\Gamma': \overline{Q}$ имеет нечётный порядок, не меньший $m' + 1$. При этом $|\overline{Q}| = m' + 2 \nmid 2$, и, значит, порядок любой орбиты действия $\Gamma': \overline{Q}$ равен $m' + 1$. Отсюда $m' + 2 = |\overline{Q}| : m' + 1, 1 : m' + 1 > 1$. Получили противоречие. ■

Следствие 3.2. Если $A \in \text{Ad}(G)$ и $A^k = E$, где k — нечётное натуральное число, то $\mathfrak{g}^A \neq 0$.

□ Подгруппа $\Gamma := \langle A \rangle \subset \text{Ad}(G)$ является коммутативной и имеет нечётный порядок. В силу леммы 3.4, $\mathfrak{g}^A = \mathfrak{g}^\Gamma \neq 0$. ■

Число $|\text{Ad}(G)| \in \mathbb{N}$ представимо в виде $2^{d_0} k_0$, где $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а k_0 — нечётное натуральное число.

Предложение 3.3. Пусть $g \in G$ — произвольный элемент. Тогда $h := g^{2^{d_0}} \in G_{\text{st}}$.

□ Положим $A := \text{Ad}(h) = (\text{Ad}(g))^{2^{d_0}} \in \text{Ad}(G)$. Имеем $A^{k_0} = (\text{Ad}(g))^{2^{d_0} k_0} = E$ и, в силу следствия 3.2, $\mathfrak{g}^{\text{Ad}(h)} = \mathfrak{g}^A \neq 0$. Согласно предложению 3.1, $h \in G_{\text{st}}$. ■

Следствие 3.3. Для всякого $\gamma \in G/G_{\text{st}}$ имеем $\gamma^{2^{d_0}} = e$.

Теперь мы можем доказать теорему 3.5.

Напомним, что группа Ли G/G_{st} конечна. В силу следствия 3.3, указанная группа является конечной 2- группой и потому разрешима. С другой стороны, согласно лемме 3.1, группа G/G_{st} совпадает со своим коммутантом. Отсюда $G/G_{\text{st}} = \{e\}$, $G_{\text{st}} = G$.

Тем самым теорема 3.5 доказана.

Теорема 3.6. Группа G порождена объединением своих подгрупп G^0 и G_v ($v \in V$, $|G_v| < \infty$).

□ Предположим, что утверждение теоремы не выполняется.

Докажем, что существует точное представление $G': V'$ компактной группы Ли G' , которое имеет размерность менее $\dim V$ и, аналогично представлению $G: V$, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $(G')^0 \cong \mathbb{T}^{m'}$, $m' \in \mathbb{N}$;
- 2) множество весов представления $G': V'$ является 2- устойчивым;
- 3) V'/G' — гомотопическое многообразие;
- 4) группа G' не порождается своими подгруппами $(G')^0$ и $G'_{v'}$ ($v' \in V'$, $|G'_{v'}| < \infty$).

Согласно теореме 3.5, $\langle G^0 \cup D \rangle = G_{\text{st}} = G$. Другими словами, группа G порождается своими подгруппами G^0 и G_v ($v \in V \setminus \{0\}$). В то же время в группе G объединение подгрупп G^0 и G_v ($v \in V$, $|G_v| < \infty$) порождает подгруппу $H \neq G$. Значит, существует вектор $v \in V \setminus \{0\}$, такой что подгруппа $G_v \subset G$ является бесконечной и не содержится в подгруппе $H \subset G$.

Представлению $G_v: M_v$ отвечает гомоморфизм групп Ли $R: G_v \rightarrow \mathbf{O}(M_v)$. Положим $V' := M_v \subset N_v \subset V$ и $G' := R(G_v) \subset \mathbf{O}(M_v) = \mathbf{O}(V')$.

Докажем, что тавтологическое представление $G': V'$ является искомым.

Очевидно, что представление $G': V'$ точное.

Имеем $G_v^0 \cong \mathbb{T}^{m'}$, где $m' := \dim G_v \in \mathbb{N}$. Кроме того, представление $G_v^0: M_v$ точное, и поэтому $(\text{Ker } R) \cap G_v^0 = \{e\} \subset G_v^0$. Отсюда $(G')^0 = R(G_v^0) \cong G_v^0 \cong \mathbb{T}^{m'}$ и $|\text{Ker } R| < \infty$.

Множество весов представления $G_v: M_v$ с точностью до нулей совпадает с 2- устойчивым множеством $P|_{\mathfrak{g}_v} \subset \mathfrak{g}_v^*$. Поскольку $|\text{Ker } R| < \infty$, множество весов представления $G': V'$ также 2- устойчиво.

Ясно, что $M_v/G_v \cong V'/G'$. В силу следствия 2.4, фактор M_v/G_v является гомологическим многообразием; то же можно сказать и о факторе V'/G' .

Заметим, что $0 \neq v \in N_v^{G_v} \subset (\mathfrak{g}_v) \oplus N_v^{G_v} = M_v^\perp = (V')^\perp \subset V$. Значит, $\dim V' < \dim V$.

Пусть U — подмножество $\{v' \in V': |G'_{v'}| < \infty\} \subset V'$, а H' — подгруппа группы G' , порождённая подгруппами $(G')^0 \subset G'$ и $G'_{v'} \subset G'$ ($v' \in U$). Покажем, что $H' \neq G'$.

В силу соотношения $(G')^0 \cong \mathbb{T}^{m'}$, стабилизатор общего положения точного представления $G': V'$ конечен. Следовательно, $U \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольный вектор $v' \in U$. Имеем $|G'_{v'}| < \infty$ и $|\text{Ker } R| < \infty$. Поэтому $|R^{-1}(G'_{v'})| < \infty$. Кроме того, $v' \in U \subset V' = M_v \subset N_v$. Значит, найдётся число $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, для которого $G_{v+\varepsilon v'} \subset G_v$. Очевидно, что $G_{v+\varepsilon v'} = G_v \cap G_{v'} = R^{-1}(G'_{v'}) \subset G_v$. Таким образом, $R^{-1}(G'_{v'}) = G_{v+\varepsilon v'} \subset G_v$ и $|R^{-1}(G'_{v'})| < \infty$, откуда $\text{Ker } R \subset R^{-1}(G'_{v'}) \subset G_v \cap H$, $G'_{v'} = R(R^{-1}(G'_{v'})) \subset R(G_v \cap H)$.

Тем самым стало ясно, что для любого $v' \in U$ выполнены включения $\text{Ker } R \subset G_v \cap H$ и $G'_{v'} \subset R(G_v \cap H)$. Поскольку $U \neq \emptyset$, имеем $\text{Ker } R \subset G_v \cap H$. Заметим, что $G^0 \subset H$, $G_v^0 \subset G_v \cap G^0 \subset G_v \cap H$, $(G')^0 = R(G_v^0) \subset R(G_v \cap H)$. Следовательно, $H' \subset R(G_v \cap H)$, $R^{-1}(H') \subset R^{-1}(R(G_v \cap H)) = (\text{Ker } R)(G_v \cap H) \subset (G_v \cap H)(G_v \cap H) = G_v \cap H \subset H$.

Если $H' = G'$, то $G_v = R^{-1}(H') \subset H$, что неверно. Поэтому $H' \neq G'$.

Мы видим, что представление $G': V'$ является точным, а также удовлетворяет неравенству $\dim V' < \dim V$ и условиям 1)–4).

Рассуждая аналогично, мы получим бесконечную последовательность точных представлений $G': V'$ компактных групп Ли G' , в которой

- каждое из представлений $G': V'$ удовлетворяет условиям 1)–4);
- размерности пространств V' строго убывают.

Это приводит нас к противоречию, завершающему доказательство. ■

3.3. Специальные элементы группы

Обозначим через \tilde{V} комплексное пространство $V \otimes \mathbb{C}$, а через τ — оператор комплексной структуры $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$, $x+yi \rightarrow x-yi$, $x, y \in V$. Представление $G: V$ естественным образом индуцирует комплексное представление $G: \tilde{V}$. Пусть $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n \subset \tilde{V}$ ($n \in \mathbb{N}$) — изотипные компоненты комплексного представления $G^0: \tilde{V}$. Имеем $\tilde{V} = \bigoplus_{j=1}^n \tilde{V}_j$. Любое

неприводимое комплексное представление группы G^0 одномерно, что влечёт соотношение $(G^0)|_{\tilde{V}_j} \subset \mathbb{T}E \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(\tilde{V}_j)$, $j = 1, \dots, n$. Группа G переставляет подпространства $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n \subset \tilde{V}$, причём

$$\text{Ker Ad} = \{g \in G: g\tilde{V}_j = \tilde{V}_j \ \forall j = 1, \dots, n\} \subset G. \quad (3.3)$$

Оператор $\tau: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ также переставляет подпространства $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n$ пространства \tilde{V} . Если $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\tau\tilde{V}_j = \tilde{V}_j$, то каждый оператор подалгебры $\mathfrak{g}|_{\tilde{V}_j} \subset i\mathbb{R}E \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\tilde{V}_j)$ антикоммутирует с оператором $\tau|_{\tilde{V}_j}: \tilde{V}_j \rightarrow \tilde{V}_j$, и, поскольку $[\mathfrak{g}, \tau] = 0$, выполнено равенство $\mathfrak{g}\tilde{V}_j = \mathfrak{g}\tau\tilde{V}_j = 0$.

Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$.

Положим $A := \text{Ad}(g) \in \mathbf{O}(\mathfrak{g})$, $V^0 := \left\{v \in V: ((E - A)\mathfrak{g})v = 0\right\} = \bigoplus_{\lambda \in P^A} V_{\lambda} \subset V$ и,

кроме того, $\tilde{V}^0 := \left\{v \in \tilde{V}: ((E - A)\mathfrak{g})v = 0\right\} = V^0 \oplus iV^0 \subset \tilde{V}$.

Элемент $g \in G$ переставляет подпространства $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n \subset \tilde{V}$. Значит, существуют числа $p \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_p \in \{1, \dots, n\}$ и подпространства $\tilde{V}^1, \dots, \tilde{V}^p \subset \tilde{V}$, для которых $\tilde{V}^l = \bigoplus_{j=0}^{k_l-1} g^j \tilde{V}_{n_l}$, $g^{k_l} \tilde{V}_{n_l} = \tilde{V}_{n_l}$ ($l = 1, \dots, p$) и $\tilde{V} = \bigoplus_{l=1}^p \tilde{V}^l$. Без ограничения общности можно считать, что $k_1, \dots, k_{p'} \geq 2$ и $k_{p'+1} = \dots = k_p = 1$, где $p' \in \{0, \dots, p\}$.

Как легко заметить, $\tilde{V}^0 = \bigoplus_{l=p'+1}^p \tilde{V}^l \subset \tilde{V}$, $\tilde{V} = \bigoplus_{l=0}^{p'} \tilde{V}^l$. При этом $g\tilde{V}^l = \tilde{V}^l$ для всякого

$l = 0, \dots, p$. Отсюда $\text{rk}(E - g) = \dim((E - g)V) = \dim_{\mathbb{C}}((E - g)\tilde{V}) = \sum_{l=0}^{p'} \dim_{\mathbb{C}}((E - g)\tilde{V}^l)$.

Пусть $l \in \{1, \dots, p'\}$ — произвольное число. Положим $d_l := \dim_{\mathbb{C}} \tilde{V}_{n_l} \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{V}^l = k_l d_l$ и $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{V}^l)^g \leq d_l$. Значит, $\dim_{\mathbb{C}}((E - g)\tilde{V}^l) \geq (k_l - 1)d_l$.

Ввиду вышесказанного, $\text{rk}(E - g) \geq \dim_{\mathbb{C}}((E - g)\tilde{V}^0) + \sum_{l=1}^{p'} (k_l - 1)d_l$. Кроме того, $2 \cdot \|(E - A)P\| = 2 \cdot \|P \setminus P^A\| = \dim(V/V^0) = \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{V}/\tilde{V}^0) = \sum_{l=1}^{p'} \dim_{\mathbb{C}} \tilde{V}^l = \sum_{l=1}^{p'} k_l d_l$, откуда $\text{rk}(E - g) - \|(E - A)P\| \geq \dim_{\mathbb{C}}((E - g)\tilde{V}^0) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{p'} (k_l - 2)d_l \geq \dim_{\mathbb{C}}((E - g)V^0) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{p'} (k_l - 2)$.

Утверждение 3.1. *Справедливо неравенство $\text{rk}(E - g) \geq \|(E - A)P\|$. При этом равенство $\text{rk}(E - g) = \|(E - A)P\|$ возможно лишь в случае $\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_{\lambda} \subset V^g$ и $A^2 = E$.*

□ Имеем $\text{rk}(E - g) - \|(E - A)P\| \geq \dim_{\mathbb{C}}((E - g)V^0) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{p'} (k_l - 2) \geq 0$. Допустим, что $\text{rk}(E - g) - \|(E - A)P\| = 0$. Тогда $(E - g)V^0 = 0$ и $k_1 = \dots = k_{p'} = 2$. Следовательно,

$\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_\lambda = V^0 \subset V^g$. Кроме того, $k_1, \dots, k_p \in \{1, 2\}$, и, значит, $g^2 \tilde{V}_j = \tilde{V}_j$, $j = 1, \dots, n$.

В силу (3.3), $\text{Ad}(g^2) = E$. ■

Утверждение 3.2. Если $A^5 = E$ и $\text{rk}(E - g) - \|(E - A)P\| \leq 2$, то $A = E$.

□ По условию $\text{Ad}(g^5) = E$. В силу (3.3), $g^5 \tilde{V}_j = \tilde{V}_j$ для любого $j = 1, \dots, n$. Отсюда $k_1, \dots, k_p \in \{1, 5\}$, $k_1 = \dots = k_{p'} = 5$, $2 \geq \text{rk}(E - g) - \|(E - A)P\| \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{l=1}^{p'} (k_l - 2) = \frac{3p'}{2}$, $p' \leq 1$.

Напомним, что оператор $\tau: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ переставляет подпространства $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n \subset \tilde{V}$, причём если $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\tau \tilde{V}_j = \tilde{V}_j$, то $\mathfrak{g} \tilde{V}_j = 0$, $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}^0$. Далее, $\tilde{V}^0 = \bigoplus_{l=p'+1}^p \tilde{V}^l \subset \tilde{V}$

и $\tau \tilde{V}^0 = \tilde{V}^0$. Значит, $5p' = k_1 + \dots + k_{p'} = \left| \{j \in \{1, \dots, n\} : \tilde{V}_j \cap \tilde{V}^0 = 0\} \right| \cdot 2$, $p' \leq 1$.

Поскольку $p' \leq 1$ и $p' \cdot 2$, имеем $p' = 0$, $k_1 = \dots = k_p = 1$. Таким образом, $g \tilde{V}_j = \tilde{V}_j$, $j = 1, \dots, n$. В силу (3.3), $\text{Ad}(g) = E$. ■

Множество $(E - A)P \subset \mathfrak{g}$ является 2-устойчивым. Его линейная оболочка есть не что иное как подпространство $(E - A)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ размерности $r := \text{rk}(E - A) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Значит,

- если $A \neq E$, то $\|(E - A)P\| - r \geq 2$;
- если $A \neq E$ и $\|(E - A)P\| - r = 2$, то множество $(E - A)P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо, а любые его ненулевые векторы в количестве не более r линейно независимы.

Утверждение 3.3. Допустим, что $A \neq E$. Тогда $\omega(g) \geq 2$, причём если $\omega(g) = 2$, то $\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_\lambda \subset V^g$, $A^2 = E$ и $\|(E - A)P\| - r = 2$.

□ Имеем $\omega(g) = (\text{rk}(E - g) - \|(E - A)P\|) + (\|(E - A)P\| - r)$. Осталось применить утверждение 3.1. ■

Следствие 3.4. Предположим, что $g \in \Omega$ и $A \neq E$. Тогда $\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_\lambda \subset V^g$, $A^2 = E$, $\|(E - A)P\| - r = 2$, множество $(E - A)P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо, а любые его ненулевые векторы в количестве не более r линейно независимы.

Лемма 3.5. Если $g \in \Omega'$, то $A = E$.

□ Допустим, что $A \neq E$.

Имеем $\|(E - A)P\| - r \geq 2$. Далее, согласно условию, $\omega(g) = 4$ и $\omega(g^5) = 0$. Значит, $\text{rk}(E - g) - \|(E - A)P\| = \omega(g) - (\|(E - A)P\| - r) \leq 2$. В силу утверждения 3.2, $A^5 \neq E$, $\text{Ad}(g^5) \neq E$. Применяя к элементу $g^5 \in G$ утверждение 3.3, получаем, что $\omega(g^5) \geq 2$. Это противоречит равенству $\omega(g^5) = 0$. ■

Лемма 3.6. Допустим, что $g \in \Omega$, $A \neq E$ и $P = P^A \cup P^{-A}$. Тогда среди неразложимых компонент множества $P \subset \mathfrak{g}$ одна содержится в подпространстве $\mathfrak{g}^{-A} \subset \mathfrak{g}$, а все остальные — в подпространстве $\mathfrak{g}^A \subset \mathfrak{g}$.

□ Поскольку $\mathfrak{g}^A \cap \mathfrak{g}^{-A} = 0$, множество $P \subset \mathfrak{g}$ разлагается на компоненты $P^A \subset P$ и $P^{-A} \subset P$. Согласно следствию 3.4, множество $(E - A)P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо. При этом множество $(E - A)P \subset \mathfrak{g}$ с точностью до нулей совпадает с множеством $2P^{-A} \subset \mathfrak{g}$. ■

Лемма 3.7. Предположим, что $g \in \Omega$ и $P \neq P^A \cup P^{-A}$. Тогда $r = 1$, а множество $P \setminus P^A \subset \mathfrak{g}$ неразложимо. Кроме того, $\|P \setminus P^A\| = 3$, $\dim \langle P \setminus P^A \rangle = 2$ и $\|P^{-A}\| = 1$.

□ По условию найдутся векторы $\lambda_1, \lambda_2 \in P$, такие что $A\lambda_1 = \lambda_2$ и $\dim \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = 2$; в частности, $A \neq E$, $r > 0$. В силу следствия 3.4, $A^2 = E$, $\|P \setminus P^A\| = \|(E - A)P\| = r + 2$, а любые ненулевые векторы множества $(E - A)P \subset \mathfrak{g}$ в количестве не более r линейно независимы. Имеем $A\lambda_2 = A^2\lambda_1 = \lambda_1$. Далее, $\lambda_1, \lambda_2 \in P$, $\lambda_2 \neq \pm\lambda_1$, а ненулевые векторы $(E - A)\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2$ и $(E - A)\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ линейно зависимы. Значит, $2 > r > 0$, $r = 1$, $\|P \setminus P^A\| = r + 2 = 3$.

Таким образом, $A\lambda_1 = \lambda_2 \neq \pm\lambda_1$, $A\lambda_2 = \lambda_1 \neq \pm\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \notin P^A \cup P^{-A}$ и $\|P \setminus P^A\| = 3$. Отсюда $P \setminus P^A = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2\}$, где $\lambda \in P$ и $A\lambda = \pm\lambda$.

Имеем $\lambda \in (P \setminus P^A) \cap (P^A \cup P^{-A}) = (P \setminus P^A) \cap P^{-A} = P^{-A} \setminus P^A = P^{-A} \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}^{-A} \setminus \{0\}$. Поэтому $\|P^{-A}\| = \|P^{-A} \setminus \{0\}\| = \|(P \setminus P^A) \cap P^{-A}\| = 1$. Ввиду соотношений $\lambda \in \mathfrak{g}^{-A} \setminus \{0\}$ и $\text{rk}(E - A) = r = 1$, справедливо равенство $(E - A)\mathfrak{g} = \mathbb{R}\lambda$.

Заметим, что $0 \neq \lambda_1 - \lambda_2 = (E - A)\lambda_1 \in (E - A)\mathfrak{g} = \mathbb{R}\lambda$, $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{R}\lambda \setminus \{0\}$. Отсюда $\langle P \setminus P^A \rangle = \langle \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \langle \lambda, \lambda_1 \rangle = \langle \lambda, \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$. Значит, $P \setminus P^A = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathfrak{g}$ — неразложимое множество, причём $\dim \langle P \setminus P^A \rangle = \dim \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = 2$. ■

Следствие 3.5. Предположим, что $g \in \Omega$. Тогда подмножество $P \setminus P^A \subset P \setminus \{0\}$ содержится в некоторой неразложимой компоненте множества $P \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}$.

□ При $A = E$ доказывать нечего. В случае же $A \neq E$ достаточно воспользоваться леммами 3.6 и 3.7. ■

Следствие 3.6. Предположим, что $g \in \Omega$, а также $A \neq E$. Тогда подмножество $P' := \{\lambda \in P : (E - g)V_\lambda \neq 0\} \subset P$ содержится в одной из неразложимых компонент множества $P \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}$. В частности, $P' \subset P \setminus \{0\}$.

□ Согласно следствию 3.4, $P' \subset P \setminus P^A$. Осталось применить следствие 3.5. ■

Предложение 3.4. Если $g \in \Omega$ и $A = E$, то все изотипные компоненты $V_\lambda \subset V$ ($\lambda \in P$), кроме, быть может, одной, содержатся в подпространстве $V^g \subset V$.

□ Поскольку $A = E$, имеем $gV_\lambda = V_\lambda$ ($\lambda \in P$) и $g|_{V_\lambda} \in \mathbf{GL}_\mathbb{C}(V_\lambda)$ ($\lambda \in P \setminus \{0\}$). Как следствие,

$$\begin{aligned} 2 &\geq \omega(g) = \text{rk}(E - g) = \dim((E - g)V) = \sum_{\lambda \in P} \dim((E - g)V_\lambda) = \\ &= \dim((E - g)V_0) + \sum_{\substack{\lambda \in P \\ \lambda \neq 0}} 2 \cdot \dim_\mathbb{C}((E - g)V_\lambda). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3.4. Разложение на компоненты

Этот пункт посвящён доказательству теоремы 1.3.

Пусть $Q_1, \dots, Q_p \subset P$ ($p \in \mathbb{N}$) — неразложимые компоненты множества $P \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}$.

Имеем $P \setminus \{0\} = \bigsqcup_{l=1}^p Q_l \subset P$. Положим $V_l := \bigoplus_{\lambda \in Q_l} V_\lambda \subset V$ ($l = 1, \dots, p$).

В записи V_0 нижний индекс означает вес $0 \in \mathfrak{g}$; между тем, в ряде случаев нам будет удобно понимать этот индекс и как целое неотрицательное число.

Пространство V разлагается в прямую сумму своих попарно ортогональных G^0 -инвариантных подпространств V_l , $l = 0, \dots, p$. Далее, в группе Ли G имеются подгруппы Ли $G_l := \{g \in G: V_{l'} \subset V^g \forall l' \in \{0, \dots, p\} \setminus \{l\}\}$ ($l = 0, \dots, p$) и $\tilde{G} := G_0 \times \dots \times G_p$. При этом для всякого $l = 0, \dots, p$ выполняется равенство $\tilde{G}V_l = V_l$, а представление $G_l: V_l$ точное. В частности, $|G_0| < \infty$.

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.7. *Имеем $\tilde{G} = G$.*

Доказательству теоремы 3.7 предпошлём несколько вспомогательных утверждений, которые в дальнейшей части работы будут полезны и сами по себе.

Предложение 3.5. *Справедливо включение $G^0 \subset \tilde{G}$.*

□ Для всякого $l = 1, \dots, p$ подалгебра $\text{Lie } G_l \subset \mathfrak{g}$ есть не что иное как пересечение ядер всех весов $\lambda \in Q_{l'} \subset P \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$, $l' \in \{1, \dots, p\} \setminus \{l\}$. Поскольку $\mathfrak{g}^* = \langle P \rangle = \bigoplus_{l=1}^p \langle Q_l \rangle$,

имеем $\mathfrak{g} = \bigoplus_{l=1}^p \text{Lie } G_l$, $\text{Lie } \tilde{G} = \mathfrak{g}$, $\tilde{G} \supset G^0$. ■

Предложение 3.6. *Справедливо включение $\Omega \subset \tilde{G}$.*

□ Вытекает из следствия 3.6 и предложения 3.4. ■

Пусть $v \in V$ — произвольный вектор, такой что $|G_v| < \infty$.

Утверждение 3.4. *Представление $G_v: N_v$ точное.*

□ Если $g \in G_v$ и $N_v \subset V^g$, то $\omega(g) = \dim((E - g)N_v) = 0$, и, согласно утверждению 3.3, $\text{Ad}(g) = E$, $\mathfrak{g}v \subset V^g$, $V^g \supset (\mathfrak{g}v) \oplus N_v = V$, $g = E$. ■

Лемма 3.8. *Имеем $G_v \subset \tilde{G}$. Кроме того, существуют разложения $G_v = H_0 \times H_1 \times \dots \times H_k$ и $N_v = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), удовлетворяющие следующим условиям:*

- 1) подпространства $W_0, W_1, \dots, W_k \subset N_v$ попарно ортогональны и G_v -инвариантны;
- 2) для любых $i, j = 0, \dots, k$ линейная группа $(H_i)|_{W_j} \subset \mathbf{O}(W_j)$ тривиальна при $i \neq j$, порождена псевдоотражениями при $i = j = 0$ и изоморфна группе Пуанкаре при $i = j > 0$ (в частности, $\dim W_j = 4$ для всякого $j = 1, \dots, k$);
- 3) если $\langle G_v \cap \Omega \rangle \neq G_v$, то $k \geq 1$, а если $[G_v, G_v] \neq G_v$, то $\dim N_v \geq 4k + 2$;
- 4) для любого $j = 1, \dots, k$ найдётся вес $\lambda \in P$, такой что $V_\lambda \supset W_j$ и $V_\lambda^\perp \subset V^{H_j}$.

□ В силу теоремы 2.1, N_v/G_v — гомологическое многообразие. Далее, применяя к точному представлению $G_v: N_v$ теорему 1.1, получаем, что существуют разложения $G_v = H_0 \times H_1 \times \dots \times H_k$ и $N_v = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, удовлетворяющие условиям 1) и 2). При этом $H_0 = \langle H_0 \cap \Omega \rangle$, а группа Пуанкаре совпадает со своим коммутантом, вследствие чего условие 3) также выполняется.

Пусть $j \in \{1, \dots, k\}$ — произвольное число.

Если $h \in H_j \setminus \{E\}$ и $h^5 = E$, то $\omega(h) = \dim((E - h)N_v) = \dim W_j = 4$ и, кроме того, $\omega(h^5) = \omega(E) = 0$, откуда $h \in \Omega'$, что вместе с леммой 3.5 влечёт равенство $\text{Ad}(h) = E$. Как известно, группа Пуанкаре порождается своими элементами порядка 5. Поэтому $\text{Ad}(H_j) = \{E\}$. Отсюда следует, что, во-первых, $H_j V_\lambda = V_\lambda$ для всякого $\lambda \in P$, а во-вторых, что $\mathfrak{g}v \subset V^{H_j}$. Значит, $V^{H_j} = \mathfrak{g}v \oplus N_v^{H_j} = \mathfrak{g}v \oplus (N_v \cap W_j^\perp) = W_j^\perp$. Тем самым нами установлено, что

- изотипные компоненты представления $H_j: V$ суть в точности подпространства W_j и $V^{H_j} = W_j^\perp$ пространства V , причём представление $H_j: W_j$ неприводимо;
- пространство V разлагается в прямую сумму своих попарно ортогональных H_j -инвариантных подпространств V_λ , $\lambda \in P$.

Поэтому найдётся вес $\lambda \in P$, для которого $V_\lambda \supset W_j$ и $V_\lambda^\perp \subset V^{H_j}$. Значит, $H_j \subset \tilde{G}$.

Итак, $H_1, \dots, H_k \subset \tilde{G}$. Кроме того, $H_0 = \langle H_0 \cap \Omega \rangle \subset \langle \Omega \rangle \subset \tilde{G}$. Отсюда $G_v \subset \tilde{G}$. ■

Следствие 3.7. *Допустим, что $\langle G_v \cap \Omega \rangle \neq G_v$. Тогда найдётся вес $\lambda \in P$, такой что $\dim V_\lambda \geq 4$. Кроме того, если $[G_v, G_v] \neq G_v$, то $\dim N_v \geq 6$.*

Теперь утверждение теоремы 3.7 вытекает непосредственно из теоремы 3.6, предложения 3.5 и леммы 3.8.

Имеем $G = \tilde{G} = G_0 \times \dots \times G_p$. Поэтому $V/G \cong (V_0/G_0) \times \dots \times (V_p/G_p)$, и, согласно лемме 2.1, каждый из факторов V_l/G_l , $l = 0, \dots, p$, является гомологическим многообразием. Далее, $Q_1, \dots, Q_p \subset P \setminus \{0\}$, вследствие чего для любого $l = 1, \dots, p$ множество весов представления $G_l: V_l$ неразложимо, 2-устойчиво и не содержит нулей.

Тем самым нами полностью доказана теорема 1.3.

3.5. Неразложимый случай

Этот пункт посвящён доказательствам импликаций 2) \Rightarrow 3) в теоремах 1.4 и 1.5.

Мы по-прежнему считаем, что V/G — гомологическое многообразие, а множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 2-устойчивым. Кроме того, будем предполагать, что множество $P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо и не содержит нулей.

Согласно лемме 3.2, $\text{Ad}(G) \neq \{E\}$.

В силу леммы 3.3, $\|P\| = m + 2$. Ввиду 2-устойчивости множества $P \subset \mathfrak{g}$, любые его векторы в количестве не более m линейно независимы. В частности, при $m \geq 2$ данное множество не содержит кратных векторов.

3.5.1. Доказательство теоремы 1.4

Вначале докажем импликацию $2) \Rightarrow 3)$ в теореме 1.4.

Предположим, что $m \geq 2$.

Требуется доказать, что выполнены условия (i)–(iv) из формулировки теоремы 1.4.

Как уже отмечалось, $\|P\| = m + 2$. Пространство V разлагается в прямую сумму попарно ортогональных двумерных неприводимых G^0 -инвариантных подпространств $W_1, \dots, W_{m+2} \subset V$. При этом множество $P \subset \mathfrak{g}$ не содержит кратных векторов. Значит,

- подпространства $W_1, \dots, W_{m+2} \subset V$ являются изотипными компонентами представления $G^0: V$ и переставляются группой G ;
- для всякого $\lambda \in P$ имеем $\dim V_\lambda = 2$.

Согласно следствию 3.7, если $v \in V$ и $|G_v| < \infty$, то $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$. Теперь, пользуясь теоремой 3.6, получаем, что $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$, $\text{Ad}(G) = \langle \text{Ad}(\Omega) \rangle$.

Таким образом, мы уже доказали, что условия (i) и (iv) выполняются.

Пусть $g \in \Omega$ — произвольный элемент, такой что $A := \text{Ad}(g) \neq \pm E$.

В силу леммы 3.6, $P \neq P^A \cup P^{-A}$. Применяя лемму 3.7, получаем, что $\|P \setminus P^A\| = 3$, $\dim \langle P \setminus P^A \rangle = 2$ и $\|P^{-A}\| = 1$. Мы видим, что множество $P \subset \mathfrak{g}$ содержит три линейно независимых вектора. Значит, $3 > m \geq 2$, $m = 2$, $\|P\| = 4$, $\|P^A\| = \|P\| - \|P \setminus P^A\| = 1$.

Допустим, что $m > 2$.

Из вышесказанного следует, что $\text{Ad}(\Omega) \subset \{\pm E\}$, $\text{Ad}(G) = \langle \text{Ad}(\Omega) \rangle \subset \{\pm E\}$, откуда $GW_j = W_j \forall j = 1, \dots, m+2$. Далее, поскольку $\text{Ad}(G) \neq \{E\}$, имеем $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$, и, таким образом, все условия (i)–(iv) выполняются.

Теперь предположим, что $m = 2$.

Имеем $\|P\| = 4$, $P = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \subset \mathfrak{g}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$. Любые два вектора множества $P \subset \mathfrak{g}$ линейно независимы, и, значит, прямые $\mathbb{R}\lambda_j \subset \mathfrak{g}$, $j = 1, 2, 3, 4$, попарно различны. Будем считать, что

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad ((\lambda_i, \lambda_j) = 0) &\Rightarrow \left((\{i, j\} = \{1, 2\}) \vee (\{i, j\} = \{3, 4\}) \right); \\ \forall j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad V_{\lambda_j} &= W_j \subset V \end{aligned} \quad (3.4)$$

(этого можно добиться путём надлежащих перенумераций).

Рассмотрим произвольный элемент $g \in \Omega$.

Покажем, что $g(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$.

При $A := \text{Ad}(g) = \pm E$ доказывать нечего.

Допустим, что $A \neq \pm E$. Тогда $\|P^A\| = \|P^{-A}\| = 1$. Следовательно, найдутся числа $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, такие что $A\lambda_i = \lambda_i$ и $A\lambda_j = -\lambda_j$. Очевидно, что $(\lambda_i, \lambda_j) = 0$, $gV_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$ и $gV_{\lambda_j} = V_{\lambda_j}$. В силу (3.4), $g(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$.

Тем самым мы установили, что $g(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$ для всякого $g \in \Omega$. При этом $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$, откуда $G(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$.

Таким образом, условия (i), (ii) и (iv) выполняются.

Осталось проверить условие (iii).

Достаточно доказать, что $-E \in \text{Ad}(G)$.

Допустим, что $-E \notin \text{Ad}(G)$.

Согласно лемме 3.2, группа $\text{Ad}(G) \subset \mathbf{O}(\mathfrak{g})$ содержит отражение относительно каждой из четырёх попарно различных прямых $\mathbb{R}\lambda_j \subset \mathfrak{g}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Значит, $|\text{Ad}(G)| > 4$.

Поскольку $G(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$, для любого $g \in G$ имеем $g^2 W_j = W_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $P \subset \text{Ker}(E - \text{Ad}(g^2)) \cup \text{Ker}(E + \text{Ad}(g^2))$, что вместе с неразложимостью множества $P \subset \mathfrak{g}$ и соотношением $-E \notin \text{Ad}(G)$ влечёт равенство $(\text{Ad}(g))^2 = \text{Ad}(g^2) = E$. Мы видим, что все операторы группы $\text{Ad}(G) \subset \mathbf{O}(\mathfrak{g})$ инволютивны. Поэтому $|\text{Ad}(G) \cap (\mathbf{SO}(\mathfrak{g}))| \leq 2$, $|\text{Ad}(G)| \leq 4$, что противоречит неравенству $|\text{Ad}(G)| > 4$.

Следовательно, $-E \in \text{Ad}(G)$, и, таким образом, все условия (i)–(iv) выполняются. Тем самым теорема 1.4 полностью доказана.

3.5.2. Доказательство теоремы 1.5

Теперь докажем импликацию $2) \Rightarrow 3)$ в теореме 1.5.

Предположим, что $m = 1$, а группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ не содержит комплексных отражений.

Требуется доказать, что $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = 3$, $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$, $G = \langle \Omega \rangle$, а представление $G: V$ приводимо.

Как уже отмечалось, $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = m + 2 = 3$. Кроме того, $\text{Ad}(G) \neq \{E\}$, откуда $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$. Если $v \in V$, $|G_v| < \infty$ и $G_v \neq \langle G_v \cap \Omega \rangle$, то $\dim N_v = \dim V - \dim G = 5$ и, согласно следствию 3.7, $[G_v, G_v] = G_v \neq \{E\}$, $G_v \subset [G, G] \subset \text{Ker Ad}$, что, в частности, влечёт неразрешимость группы $\text{Ker Ad} \subset G$.

Допустим, что представление $G: V$ неприводимо.

Поскольку группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ неприводима и не содержит комплексных отражений, имеем $G^0 = \mathbb{T}E \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ и $\text{Ker Ad} = G^0 K \subset G$, где $K := \text{Ker Ad} \cap \mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(V) \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ — конечная неприводимая импримитивная комплексная линейная группа (см. [3, § 7]).

Комплексное пространство V разлагается в прямую сумму трёх одномерных комплексных подпространств, переставляемых группой $K \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, а значит, и группой $\text{Ker Ad} = G^0 K \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. Поэтому существует гомоморфизм $\text{Ker Ad} \rightarrow S_3$ с коммутативным ядром. Группа S_3 разрешима; то же можно сказать и о группе $\text{Ker Ad} \subset G$.

Следовательно, если $v \in V$ и $|G_v| < \infty$, то $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$. Пользуясь теоремой 3.6, получаем, что $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$.

Таким образом, $\dim G = 1$, $0 \notin P$, $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = 3$, $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$, $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$ ($v \in V$, $|G_v| < \infty$), а группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ неприводима и не содержит комплексных отражений. Данная ситуация невозможна (см. [3, § 7], рассуждения в точности повторяют доказательство леммы 7.2).

Полученное противоречие показывает, что представление $G: V$ приводимо.

Осталось доказать, что $G = \langle \Omega \rangle$.

Приводимое представление $G: V$ обладает двумерным инвариантным подпространством. Значит, найдётся вектор $v \in V \setminus \{0\}$, для которого $Gv = G^0v$. Имеем $|Gv| < \infty$ и $G = G^0G_v$. Если $G_v \neq \langle G_v \cap \Omega \rangle$, то $G_v \subset \text{Ker Ad}$, $G = G^0G_v \subset \text{Ker Ad}$, что противоречит равенству $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$. Отсюда $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$, $G = G^0G_v \subset \langle G^0 \cup \Omega \rangle$.

Мы видим, что $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$. Поскольку $\text{Ad}(G) = \{\pm E\}$, существует элемент $g \in \Omega$, такой что $\text{Ad}(g) = -E$. Далее, в группе G каждый элемент подмножества G^0g сопряжён элементу $g \in \Omega$ и потому принадлежит подмножеству Ω . Отсюда $\langle \Omega \rangle \supset G^0$, $\langle \Omega \rangle \supset G^0 \cup \Omega$, $\langle \Omega \rangle \supset \langle G^0 \cup \Omega \rangle = G$, $G = \langle \Omega \rangle$.

Тем самым теорема 1.5 полностью доказана.

Литература

- [1] М. А. Михайлова, «О факторпространстве по действию конечной группы, порождённой псевдоотражениями», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 48:1 (1984), 104—126.
- [2] C. Lange, *When is the underlying space of an orbifold a topological manifold?*; arXiv:math.GN/1307.4875.
- [3] О. Г. Стырт, «О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой», *Труды ММО*, 70 (2009), 235—287.
- [4] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980.